

Kombinatorik: Die Kunst zu zählen (Grundkurs)

Einführung: Um Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können, muss man wissen, wie viele Ergebnisse überhaupt in Betracht kommen können. Beim Würfel sind dies z.B. 6 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Zahl zu würfeln beträgt also 1 zu 6, bzw. $\frac{1}{6}$.

Aber nicht immer lässt sich die Anzahl aller Gesamtergebnisse so einfach bestimmen. Damit beschäftigt sich die Kombinatorik.

Aufgabentyp 1: Unterschiedliche Anzahl von Möglichkeiten

Fall: Ein Restaurant hat 2 Vorspeisen, 5 Hauptgerichte und 4 Desserts. Wie viele unterschiedliche Menüs kann man wählen?

Lösung: $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$

Hier werden also alle Ergebnisse miteinander multipliziert und man erhält 40 Möglichkeiten.

Aufgabentyp 2: Verteilung auf Plätze (Gleiche Anzahl Plätze und Personen)

4 Schüler sollen sich auf 4 Plätze verteilen.

Wie viele Kombinationen gibt es hierzu?

Überlegung: Der erste kann zwischen 4 Möglichkeiten wählen, der zweite hat dann nur noch 3 Plätze zur Auswahl, der dritte nur noch 2 Möglichkeiten, usw.

Also gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten

Man schreibt für diese Rechnung kurz: $4!$ (4 Fakultät)

Es gilt: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Bemerkung: $1! = 1$

$0! = 1$ (← per Definition!)

Aufgabentyp 3: Gleiche Anzahl von Möglichkeiten im Gegensatz zu Aufgabentyp 1

Ein Zahlenschloss besteht aus drei Rädchen. Wie viele Kombinationen gibt es eine Zahl einzustellen?

Lösung: Bei jedem Rädchen kann man 0 bis 9 Möglichkeiten, also 10 Möglichkeiten pro Rad. Daher gilt:

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ Kombinationen. Die Formel lautet also bei n Möglichkeiten und k Anzahl

$$n \cdot n \cdot n = n^3$$

Aufgabentyp 4: Verteilung auf Plätze (Mehr Plätze als Personen)

Bei Aufgabentyp 3 haben wir 5 Personen auf 5 Plätze verteilt, aber es können ja auch weniger Personen sein. Dies behandelt Aufgabentyp 4. Wie viele Kombinationen gibt es nur 3 Leute auf 5 Plätze zu verteilen?

Es gibt: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Als Formel ausgedrückt: $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$. Wir kürzen also die nicht gebrauchten Möglichkeiten ($2 \cdot 1$)

raus. Damit ergibt sich: $\frac{n!}{(n-k)!}$. „n“ entspricht den Möglichkeiten und „k“ ist die Anzahl.

Man kann diesen Aufgabentyp auch folgendermaßen auffassen: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3er Teilmengen aus 5 Plätzen zu bilden? Liest man in einer Aufgabe das Stichwort „Teilmenge“, so handelt es sich meist um diesen Aufgabentyp.

Beispiel: Aus einer Gruppe von 7 SchülerInnen sollen drei Personen ausgewählt werden. Wie viele 3er-Teilmengen kann man bilden?

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \text{ Möglichkeiten}$$

Bei diesem Aufgabentyp spielt die Reihenfolge eine Rolle. Die Kombination (Fritz, Sandra, Paul), (Fritz, Paul, Sandra), (Sandra, Paul, Fritz) usw. werden als je eigene Möglichkeit gezählt. Solche Vertauschungen nennt man Permutationen.

Beispiel (mit Beachtung der Reihenfolge): Bei einem Schülerwettbewerb werden von 5 Schülern 3 Preisträger ausgewählt. Der erste erhält den tollen Buchgutschein, der zweite einen Bleistift und der dritte einen Trostpreis. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Klar, hier spielt die Reihenfolge, wer zuerst ausgewählt wird, eine Rolle und jeder Fall soll als eigener Fall gezählt werden.

Anmerkung: Im Taschenrechner gibt man folgenden Befehl ein: $nPr(5, 3) = 60$, wie oben schon gezeigt. Diesen Befehl findet man auch im Menü => Wahrscheinlichkeit => Permutation.

Aufgabentyp 5 (Verteilung ohne Beachtung der Reihenfolge)

Beim vorherigen Aufgabentyp spielte die Reihenfolge eine Rolle. Soll die Reihenfolge keine Rolle spielen, dann werden alle Vertauschungen nur als *eine* Möglichkeit gezählt. Es gibt also weniger Kombinationen.

Im vorherigen Fall der geordneten Stichprobe wird bei der Frage, wie viele 3er Teilmengen man bilden kann, unterschieden zwischen $\{1\ 2\ 3\}$ $\{1\ 3\ 2\}$ $\{2\ 1\ 3\}$ $\{2\ 3\ 1\}$ $\{3\ 2\ 1\}$ $\{3\ 1\ 2\}$. Wenn die Reihenfolge keine Rolle spielen soll, hat man keine 6 Möglichkeiten, sondern nur eine Möglichkeit. usw.

Es gibt weniger Möglichkeiten, Man muss also noch durch die Anzahl der „Vertauschungen“ teilen.

Wir kürzen also durch 6 Möglichkeiten, die man, wie oben gezeigt, mit $3!$ berechnet: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$

Oder als Formel: Sei n Anzahl aller Elemente und k Anzahl der Teilmengen.

$$10 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(3)!} = \frac{5!}{(5-3)!(3)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \text{ (Sprich: } n \text{ über } k)$$

Diese Formel heißt der Binomialkoeffizient. Dabei gilt, wie man durch Nachrechnen schnell zeigt:

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ und } \binom{n}{n} = 1$$

Im Taschenrechner gibt man als Befehl $5 nCr 3$ ein.

Tipp: Da man nCr und nPr leicht verwechseln kann., kann man beide Möglichkeiten und den GTR eingeben und schauen, wo es mehr, bzw. weniger Möglichkeiten gibt.

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten hat man 2 Personen von 9 auszuwählen. Hier ist also die die Frage, wie viele 2er-Teilmengen man aus 9 Personen bilden kann. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, rechnet man folgendermaßen:

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{(9-2)! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \frac{72}{2} = 36$$

Aufgabentyp 6 (Mehr Personen als Plätze)

Bisher hatten wir immer mehr Plätze als Personen ($n > k$), aber dies kann natürlich auch umgekehrt sein ($k > n$).

Beispiele:

Wie viele Kombinationen gibt es 5 T-Shirts (k) auf 2 Schränke (n) zu verteilen?

Wie viele Kombinationen gibt es 30 Kinder (k) auf 3 Busse (n) zu verteilen?

Wie viele Kombinationen gibt es 5 Eier (k) auf 3 Eierkartons (n) zu verteilen?

Bei diesem Fall ist es wichtig, dass die T-Shirts, Eier nicht unterscheidbar sind und dass z.B. alle Shirts in einen Schrank passen würden.

Die Herleitung der Formel findet sich auf dem Blatt „Kombinatorik für LK“. Ohne Herleitung führen wir folgende Formel ein:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man 7 ($= k$) ununterscheidbare Mäuse auf 3 ($= n$) Käfige verteilen?

Es gilt: $\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$ Es gibt also 36 Möglichkeiten!

Diesen Fall kann man leicht verwechseln mit Aufgabentyp 2, wenn man folgendes denkt: Die erste Maus hat 3 Käfige zur Auswahl, die zweite Maus hat ebenso 3 Käfige zur Auswahl und so weiter. Also $3^7 = 2187$. Das sind viel mehr Möglichkeiten als Fall 4, da die Reihenfolge beachtet wird. Für unsere Fragestellung ist es aber egal, ob zuerst Maus 1 oder Maus 2 in den Käfig gesetzt wurde oder umgekehrt. Hauptsache beide sind am Schluss im Käfig. Daher zählt dies nicht als unterschiedlicher Fall.

Anmerkung: Oft werden keine 6 Aufgabentypen, sondern bei den letzten 4 Typen von folgenden 4 Fällen unterschieden. Hierbei stellt man sich ein Urnenmodell mit durchnummerierten Kugeln und folgende Situationen vor:

Nun kann man eine bestimmte Anzahl k aus n -Elementen auswählen. Daher kann man:

- Die Reihenfolge beachten (geordnete Stichprobe). Es ist also ein Unterschied ob man $\{2;5\}$ oder $\{5;2\}$ zieht. Jede Kombination wird extra gezählt.
- Die Reihenfolge nicht beachten (ungeordnete Stichprobe)
- Die Kugeln zurücklegen (mit Wiederholung)
- Die Kugeln nicht zurücklegen (ohne Wiederholung)

Aufgabentyp 3	1. Fall: Geordnete Stichprobe mit Wiederholung	n^k Möglichkeiten
Aufgabentyp 4	2. Fall: Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$ GTR npr
Aufgabentyp 5	3. Fall: Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ GTR ncr
Aufgabentyp 6	4. Fall: Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung	$\binom{n+k-1}{k}$

Genauere Infos habe ich in meinen AB Kombinatorik Leistungskurs geschrieben. Was hilfreicher ist, muss jeder selbst entscheiden.

Übungsblatt zu Kombinatorik (Nur Stichprobe)

- Die neue Flagge von Oktopan soll aus drei parallelen verschiedenfarbigen Streifen bestehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es bei 10 Farben?
- Bei einem Turnier treten 8 Mannschaften an. Wie viele Paarungen sind möglich?
- Beim Fußballtoto (11er-Wette) sind für 11 Spielpaarungen die Zahlen 0, 1, 2 einzutragen. Wie viele Tipps sind möglich?
- Auf 3 Eierkartons sollen 8 Eier verteilt werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall
Geordnet mit Wiederholung	Geordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet mit Wiederholung
Formel:	Formel:	Formel:	Formel:
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\binom{n+k-1}{k}$
Fußballtoto: 11 Spielpaarungen 3 Ergebnismöglichkeiten $n = 3$ $k = 11$ $3^{11} = 177.147$	Flagge von Oktopan: drei verschiedenfarbige Streifen 10 verschiedene Farben $n = 10$ $k = 3$ $\frac{10!}{(10-3)!} = 720$	Tunier mit 8 Mannschaften: 8 Mannschaften 2 Mannschaften pro Spiel $n = 8$ $k = 2$ $\frac{8!}{(8-2)!2!} = 28$	8 Eier auf 3 Eierkartons verteilen: 8 Eier 3 Eierkartons $n = 3$ $k = 8$ $\binom{3+8-1}{8} = 45$
In einer Schulklasse sind 12 Schülerinnen und 16 Schüler. Es sollen draus 4 Schülerinnen und 5 Schüler als Helfer für ein Schulfest ausgewählt werden, Auf wie viele Arten ist das möglich? $\binom{12}{4} \cdot \binom{16}{5} = 2.162.160 \quad \text{mögliche Arten Schüler und Schülerinnen für das Schulfest auszuwählen}$			

Übungsblatt zu Kombinatorik (Nur Stichprobe)

- Die neue Flagge von Oktopan soll aus drei parallelen verschiedenfarbigen Streifen bestehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es bei 10 Farben?
- Bei einem Turnier treten 8 Mannschaften an. Wie viele Paarungen sind möglich?
- Beim Fußballtoto (11er-Wette) sind für 11 Spielpaarungen die Zahlen 0, 1, 2 einzutragen. Wie viele Tipps sind möglich?
- Auf 3 Eierkartons sollen 8 Eier verteilt werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall
Geordnet mit Wiederholung	Geordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet mit Wiederholung
Formel:	Formel:	Formel:	Formel:
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\binom{n+k-1}{k}$

In einer Schulklasse sind 12 Schülerinnen und 16 Schüler. Es sollen draus 4 Schülerinnen und 5 Schüler als Helfer für ein Schulfest ausgewählt werden, Auf wie viele Arten ist das möglich?

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{16}{5} = 2.162.160 \quad \text{mögliche Arten Schüler und Schülerinnen für das Schulfest auszuwählen}$$

